Тройные произведения семейств Колмана

А. А. Панчишкин

Памяти дорогого Кости Бейдара

Institut Fourier, Université Grenoble-1
B.P.74, 38402 St.–Martin d'Hères, FRANCE
e-mail : panchish@mozart.ujf-grenoble.fr, FAX: 33 (0) 4 76 51 44 78
http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~panchish/30LVM

Содержание

Аннотация

Модулярные формы изучаются с точки зрения компютерной алгебры, а также как элементы p-адических Банаховых модулей.

Представлены методы решения проблем теории чисел посредством производящих функций и их связи с модулярными формами.

В частности, обсуждаются специальные значения L-функций.

Для простого,числа p рассматриваются тройки классических модулярных форм

$$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} e(nz) \in \mathcal{S}_{k_j}(N_j, \psi_j),\ (j = 1, 2, 3)$$

весов k_1, k_2, k_3, уровней N_1, N_2, N_3,и характеров $\psi_j \bmod N_j$.

Описаны p-адические L функции четырёх переменных, связанные с тройными произведениями семейств Колмана

$$k_j \mapsto \left\{ f_{j,k_j} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j}(k) q^n \right\}$$

параболических форм положительного наклона $\sigma_j = v_p(\alpha^{(1)}_{p,j}(k_j)) \geq 0$ где $\alpha^{(1)}_{p,j} = \alpha^{(1)}_{p,j}(k_j)$ собственные значения оператора Аткина $U = U_p$. *

1 Введение

Модулярные формы как объекты компьютерной алгебры

Костя Бейдар был очень жизнерадостным человеком, про которых говорят : "душа компании". Он любил танцевать, но также и любил решать открытые математические проблемы, и он

*Ключевые слова: модулярные формы, p-адические L-функции, p-адические банаховы модули.
УДК: Теория чисел (MSC 11F60)

уважал комьютерную алгебру. В некоторых работах он использовал p-адические числа, Банаховы кольца и модули.

Решение проблемы Колмана-Мазура о существовании p-адических L-функций двух переменных, связанных с собственными семействами положительного наклона было дано автором в предыдущей статье [PaTV] (Invent. Math. v. 154, N3 (2003), pp. 551 - 615).

Цель данной работы – перенести результаты статьи [PaTV] на тройные пройзведения Гарретта семейств модулярных форм Колмана.

Мы рассматриваем модулярные формы как 1) *степенные ряды* $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}[[q]]$ и как 2) *голоморфные функции на верхней полуплоскости* $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}\ z > 0\}$

где $q = \exp(2\pi i z)$, $z \in \mathbb{H}$, и рассмотрим L-функцию $L(f, s, \chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) a_n n^{-s}$ *для любого характера Дирихле* $\chi : (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \to \mathbb{C}^*$.

Знаменитый пример - функция Рамануджана $\tau(n)$

Функция Δ *(переменной* z*) определена формальным выражением* $\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) q^n$

$= q\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m)^{24} = q - 24q^2 + 252q^3 + \cdots$ (*модулярная форма относительно группы* $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$).

$\tau(1) = 1, \tau(2) = -24$,
$\tau(3) = 252, \tau(4) = -1472$
$\tau(m)\tau(n) = \tau(mn)$
для $(n, m) = 1$,
$|\tau(p)| \le 2p^{11/2}$
(Ramanujan-Deligne)
для всех простых чисел p .

Быстрое вычисление функции Рамануджана:

Положим $h_k := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^{k-1}q^d}{1-q^d}$.

Доказывается: $\Delta = (E_4^3 - E_6^2)/1728$ где $E_4 = 1 + 240h_4$ и $E_6 = 1 - 504h_6$:

Вычисление с PARI-GP

(см. [BBBCO], The PARI/GP number theory system. `http://pari.math.u-bordeaux.fr`)

$$h_k := \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} d^{k-1} q^n = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{d^{k-1}q^d}{1-q^d} \Longrightarrow$$

```
gp > h6=sum(d=1,20,d^5*q^d/(1-q^d)+O(q^20))
gp > h4=sum(d=1,20,d^3*q^d/(1-q^d)+O(q^20)
gp > Delta=((1+240*h4)^3-(1-504*h6)^2)/1728

q - 24*q^2 + 252*q^3 - 1472*q^4 + 4830*q^5 - 6048*q^6 - 16744*q^7
+ 84480*q^8 - 113643*q^9 - 115920*q^10 + 534612*q^11
- 370944*q^12 - 577738*q^13 + 401856*q^14 + 1217160*q^15
+ 987136*q^16 - 6905934*q^17+ 2727432*q^18 + 10661420*q^19 + O(q^20)
```

Сравнение Рамануджана: $\tau(n) \equiv \sum_{d|n} d^{11} \mod 691$:

```
gp > (Delta-h12)/691
%10 = -3*q^2 - 256*q^3 - 6075*q^4 - 70656*q^5 - 525300*q^6
 - 2861568*q^7 - 12437115*q^8 - 45414400*q^9
 - 144788634*q^10 - 412896000*q^11 - 1075797268*q^12
 - 2593575936*q^13 - 5863302600*q^14 - 12517805568*q^15
 - 25471460475*q^16 - 49597544448*q^17
 - 93053764671*q^18 - 168582124800*q^19 + O(q^20)
```

Применение модулярных форм к проблемам теории чисел:

Производящая функция $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n \in \mathbb{C}[[q]]$ для арифметической функции $n \mapsto a_n$, например $a_n = p(n)$	$\rightsquigarrow$	Выражение через модулярную форму, например $\sum_{n=0}^{\infty} p(n) q^n = (\Delta/q)^{-1/24}$	$\rightsquigarrow$	Число (ответ)
		$\uparrow$		$\uparrow$
Пример 1 (см. [Chand70]): (Харди-Рамануджан) $p(n) = \frac{e^{\pi\sqrt{2/3(n-1/24)}}}{4\sqrt{3}\lambda_n^2} + O(e^{\pi\sqrt{2/3}\lambda_n}/\lambda_n^3)$, $\lambda_n = \sqrt{n - 1/24}$,		Хорошие базисы конечномерность много соотношений и тождеств		Значения L-функций, сравнения, ...

Пример 2 (см. в [Ma-Pa05]): теорема Ферма-Уайлза, гипотеза Бёрча-Суиннертона-Дайера, ...

2 Семейства модулярных форм Колмана

Семейства модулярных форм Колмана переменного веса $k \geq 2$

$k \mapsto f_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) q^n \in \overline{\mathbb{Q}}[\![q]\!] \subset \mathbb{C}_p[\![q]\!]$
Модельный пример p-адического семейства: *ряд Эйзенштейна веса* k
$a_n(k) = \sum_{d|n} d^{k-1}, f_k = E_k$
$a_p(k) = 1 + p^{k-1} \Rightarrow$ Многочлен Гекке (Эйлеровский множитель):
$1 - a_p X + p^{k-1} X^2 = (1 - X)(1 - p^{k-1} X)$

1) функции $k \mapsto a_n(k)$ (*коэффициенты ряда*) и p-параметр Сатаке $k \mapsto \alpha_p^{(1)}(k)$ являются p-адическими аналитическими при $(n, p) = 1$:
$1 - a_p X + \psi(p) p^{k-1} X^2 = (1 - \alpha_p^{(1)}(k) X)(1 - \alpha_p^{(2)}(k) X)$

2) наклон $\mathrm{ord}_p(\alpha(k)) = \sigma > 0$ *постоянен и положителен*

2.1 *Построение семейств Колмана*

Колман и Хида установили, что все классические модулярные формы живут в p-адических аналитических семействах, см. [Hi86], [CoPB]. Комьютерная программа на PARI для вычисления таких семейств дана в [CST98] (см. также на Web-page of W.Stein, Modular Forms Database `http://modular.fas.harvard.edu/`)

Теория Банаховых модулей (Колман):

• Оператор U действует как вполне непрерывный оператор на Банахвом $\mathcal{A}$-подмодуле $\mathcal{M}^\dagger(Np^v; \mathcal{A}) \subset \mathcal{A}[\![q]\!]$ (т.е. U – это предел конечномерных операторов) $\Longrightarrow$ существует *определитель Фредгольма* $P_U(T) = \det(Id - T \cdot U) \in \mathcal{A}[\![T]\!]$

• построен вариант *теории Рисса*: для любого обратного корня $\alpha \in \mathcal{A}^*$ ряда $P_U(T)$ существует собственная функция g, $Ug = \alpha g$ такая что все значения $ev_k(g) \in \mathbb{C}_p[\![q]\!]$ являются классическими параболическими формами для всех k весов в некоторой окрестности $\mathcal{B} \subset X$ (см. в [CoPB])

3 Тройные произведения Гарретта

3.1 *Тройки (примитивных) модулярных форм*

$f_j(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,j} q^n \in \mathcal{S}_{k_j}(N_j, \psi_j)$, $(j = 1, 2, 3)$ весов k_1, k_2, k_3, кондукторов N_1, N_2, N_3, и характеров $\psi_j \bmod N_j$, $N := \mathrm{LCM}(N_1, N_2, N_3)$.

Пусть p простое число, $p \nmid N$.

Здесь $f_j \in \overline{\mathbb{Q}}[\![q]\!] \overset{i_p}{\hookrightarrow} \mathbb{C}_p[\![q]\!]$ при фиксированном вложении $\overline{\mathbb{Q}} \overset{i_p}{\hookrightarrow} \mathbb{C}_p$, $\mathbb{C}_p = \widehat{\overline{\mathbb{Q}}}_p$ поле Тэйта.

Рассматриваются только сбалансированные тройки весов:

$$k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq 2, \text{ и } k_1 \leq k_2 + k_3 - 2 \tag{1}$$

3.2 *Тройное произведения Гарретта*

Это некоторое роизведение Эйлера степени 8:

$$L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \prod_{p \nmid N} L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, \chi(p)p^{-s}), \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
&\text{где } L((f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)_p, X)^{-1} = \\
&\det\left(1_8 - X \begin{pmatrix} \alpha_{p,1}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,1}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,2}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,2}^{(2)} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \alpha_{p,3}^{(1)} & 0 \\ 0 & \alpha_{p,3}^{(2)} \end{pmatrix}\right) \\
&= \prod_{\eta} (1 - \alpha_{p,1}^{(\eta(1))} \alpha_{p,2}^{(\eta(2))} \alpha_{p,3}^{(\eta(3))} X) \\
&= (1 - \alpha_{p,1}^{(1)} \alpha_{p,2}^{(1)} \alpha_{p,3}^{(1)} X)(1 - \alpha_{p,1}^{(1)} \alpha_{p,2}^{(1)} \alpha_{p,3}^{(2)} X) \cdot \ldots \cdot (1 - \alpha_{p,1}^{(2)} \alpha_{p,2}^{(2)} \alpha_{p,3}^{(2)} X),
\end{aligned} \tag{3}$$

произведение берется по всем 8 отображениям $\eta : \{1, 2, 3\} \to \{1, 2\}$.

3.3 *Критические значения и функциональное уравнение*

Нормализованная функция (см. [De79], [Co], [Co-PeRi]), имеет вид:

$$\begin{aligned}
&\Lambda(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi) = \\
&\Gamma_{\mathbb{C}}(s)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_3 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_2 + 1)\Gamma_{\mathbb{C}}(s - k_1 + 1)L(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3, s, \chi),
\end{aligned} \tag{4}$$

где $\Gamma_{\mathbb{C}}(s) = 2(2\pi)^{-s}\Gamma(s)$. Гамма-множитель определяет критические значения $s = k_1, \cdots, k_2 + k_3 - 2$ для $\Lambda(s)$.

Функциональное уравнение для $\Lambda(s)$ имеет вид:

$$s \mapsto k_1 + k_2 + k_3 - 2 - s.$$

3.4 *Метод: интегральное представлениые Гарретта*

Описание метода

• вариант **интегрального представления Гарретта** тройной L-функции в виде: для $r = 0, \cdots, k_2 + k_3 - k_1 - 2$,

$$\Lambda(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - r, \chi) =$$

$$\iiint_{(\Gamma_0(N^2p^{2v})\backslash\mathbb{H})^3} \overline{\tilde{f}_{1,k_1}(z_1)\tilde{f}_{2,k_2}(z_2)\tilde{f}_{3,k_3}(z_3)}\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi) \prod_j (\frac{dx_j dy_j}{y_j^2})$$

где $\tilde{f}_{j,k_j} =: f^0_{j,k_j}$ это собственная функция сопряженного оператора Аткина U_p^* v $\mathcal{M}_{k_j}(Np, \psi_j)$, $f_{j,k_j,0}$ – собственная функция оператора Аткина U_p, $\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi) \in \mathcal{M}_T(N^2p^{2v}) = \mathcal{M}_{k_1}(N^2p^{2v}, \psi_1) \otimes \mathcal{M}_{k_2}(N^2p^{2v}, \psi_2) \otimes \mathcal{M}_{k_3}(N^2p^{2v}, \psi_3)$ тройная модулярная форма веса (k_1, k_2, k_3), с фиксированным тройным характером (ψ_1, ψ_2, ψ_3).

Тройная модулярная форма $\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi)$ строится из некоторого почти голоморфного ряда *Зигеля-Эйзенштеина* $F_{\chi,r} = G^\star(z, -r; k, (Np^v)^2, \boldsymbol{\psi})$ рода три, веса $k = k_2 + k_3 - k_1$, и характера $\boldsymbol{\psi} = \chi^2\psi_1\psi_2\overline{\psi}_3$. Для этого к ряду $F_{\chi,r}$ применяется:
оператор скручивания Бёхерера введённый в [Boe-Schm],
дифференциальный оператор Ибукиямы (см. [Ibu], [BSY]).

Также используется:

• **Теория p-адического интегрирования** со значениями в Банаховых $\mathcal{A}$-модулях $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$ тройных модулярных форм над p-адической Банаховой алгеброй $\mathcal{A}$. В этой теории строятся меры на группе $Y = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ с использованием элементов $\mathcal{E}(-r, \chi)$ модуля $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$.

• **Спектральная теория тройного оператора Аткина** $U = U_{p,T}$ позволяет вычислить интеграл через проекцию π_λ модуля $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})$ на его λ-часть $\mathcal{M}_T(\mathcal{A})^\lambda$.

Доказывается что U – это вполне непрерывный $\mathcal{A}$-линейный оператор (т.е. предел конечномерных операторов), и проекция π_λ существует по общему результату Серра и Колмана, см. [CoPB], [SePB].

4 Основной результат: L-функция четырёх переменных

Обозначим χ переменный характер Дирихле $\bmod Np^v, v \geq 1$, и пусть k_j-переменные веса в **пространстве p-адических весов** $X = X_{Np^v} = \mathrm{Hom}_{cont}(Y, \mathbb{C}_p^*)$, $Y = (\mathbb{Z}/N\mathbb{Z})^* \times \mathbb{Z}_p^*$ (p-адическое аналитическое пространство). **Для** $r \in \mathbb{Z}$ **точка** $(r, \chi) \in X$ **даётся гомоморфизмом** $(y_1, y_2) \mapsto \chi(y_1)\chi(y_2 \bmod p^v)y_2^r$**.**

Символ $\langle g, h\rangle$ обозначает нормализованное скалярное произведение Петерсона модулярных форм.

Теорема. 1) *Функция* $\mathcal{L}_{\underline{f}} : (s, k_1, k_2, k_3) \mapsto \dfrac{\left\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r, \chi)\right\rangle}{\left\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0\right\rangle}$ *зависит p-адически аналитически от четырех переменных* $(\chi \cdot y_p^r, k_1, k_2, k_3) \in X \times \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$*;*

2) *Для всех p-адических весов* (k_1, k_2, k_3) *в некоторой p-адической окрестности* $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$*, с условием* $k_1 \leq k_2 + k_3 - 2$*, имеем: значения в точках* $s = k_2 + k_3 - 2 - r$ *совпадают с нормализованными критическими значениями*

$$L^*(f_{1,k_1} \otimes f_{2,k_2} \otimes f_{3,k_3}, k_2 + k_3 - 2 - r, \chi) \quad (r = 0, \cdots, k_2 + k_3 - k_1 - 2),$$

для характеров Дирихле $\chi \bmod Np^v, v \geq 1$*, с Np-полным кондуктором.*

3) *Положим $H = [2\mathrm{ord}_p(\lambda)] + 1$. Для всех весов $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B}$ и $x = \chi \cdot y_p^r$ функция*

$$x \longmapsto \frac{\left\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r,\chi)\right\rangle}{\left\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0\right\rangle}$$

продолжается до p-адической аналитической функции типа $o(\log^H(\cdot))$ переменной $x \in X$.

4.1 *Набросок доказательства*

1) • Для любого веса (k_1, k_2, k_3) используем равенство $\left\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r,\chi)\right\rangle = \left\langle \underline{f}^0, \pi_\lambda(\mathcal{E}(-r,\chi))\right\rangle$, которое выводится из $\mathrm{Im}\,\pi_\lambda = \mathrm{Ker}\,(U_T - \lambda I)^n$, $\mathrm{Ker}\,\pi_\lambda = \mathrm{Im}\,(U_T - \lambda I)^n$.

Отсюда следует: $\left\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r,\chi)\right\rangle$ зависит p-адически аналитически от $(k_1, k_2, k_3) \in \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3$, где $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \mathcal{B}_3)$ – p-адическая Банахова алгебра аналитических функций на $\mathcal{B}$.

• Для любого веса (k_1, k_2, k_3) скалярное произведение $\left\langle \underline{f}^0, \mathcal{E}(-r,\chi)\right\rangle$ дается первой координатой вектора $\pi_\lambda(\mathcal{E}(-r,\chi))$ в любом ортогональном базисе модуля $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$ содержащем $\underline{f}^0$ относительно алгебраического произведения Петерсона–Хиды $\langle g, h\rangle_a = \left\langle g^\rho | \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ Np & 0 \end{pmatrix}, h\right\rangle$ (расширенного на модуль $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$ по трилинейности).

Ответ:

Выберем (локальный) базис $\ell^1, \cdots, \ell^n$ дающийся некоторыми тройными коэффициентами Фурье двойственного $\mathcal{A}$-модуля (локально свободного конечного ранга) $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})^*$. Используем обозначение $\ell(h) = \frac{\left\langle \underline{f}^0, h\right\rangle}{\left\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0\right\rangle}$.

Геометрический смысл ℓ: первая координата $\mathcal{A}$-базиса собственных функций операторов Гекке T_q для всех $q \nmid Np$, с первым базисным элементом $f_0 \in \mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$. Такой базис несложно построить с помощью действия T_q на степенных рядах.

Кроме того, $\ell = \beta_1 \ell^1 + \cdots + \beta_n \ell^n$, и $\beta_i = \ell(\ell_i)$, причем ℓ_i обозначает двойственный базис модуля $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$: $\ell^j(\ell_i) = \delta_{ij}$. Отсюда $\beta_i = \ell(\ell_i) = \frac{\left\langle \underline{f}^0, l^i\right\rangle}{\left\langle \underline{f}^0, \underline{f}_0\right\rangle} \in \mathcal{A}$.

Для любого веса (k_1, k_2, k_3) имеем

$$\ell(\mathcal{E}(-r,\chi)) = \beta_1 \ell^1(\mathcal{E}(-r,\chi)) + \cdots + \beta_n \ell^n(\mathcal{E}(-r,\chi))$$

где $\beta_i = \ell(\ell_i) \in \mathcal{A}$, причём $\ell^i(\mathcal{E}(-r,\chi)) \in \mathcal{A}$ некоторые тройные коэффициенты Фурье функции $\mathcal{E}(-r,\chi)$.

Отсюда вытекает 1) поскольку все коэффициенты Фурье функции $\mathcal{E}(-r,\chi)$ лежат в $\mathcal{A}$.

Заключение: $\beta_i \ell_i(\mathcal{E}(-r,\chi))$ лежат в $\mathcal{A}$ и корректно определены для всех p-адических весов, не только для классических весов (k_1, k_2, k_3), откуда вытекает 1), что и даёт интерполяцию по переменным (k_1, k_2, k_3).

Отсюда видно, что существует функция $\tilde{\mathcal{E}}(-r,\chi) \in \mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$, такая, что $\ell(\mathcal{E}(-r,\chi)) = \ell(\pi_\lambda(\mathcal{E}(-r,\chi)) = \ell(\tilde{\mathcal{E}}(-r,\chi))$ (для любого веса (k_1, k_2, k_3)).

Для доказательства 2), 3), изучается зависимость от характера $x = \chi \cdot y_p^r$ и теория p-адического интегрирования.

Строятся p-адические меры μ со значениями в модуле $\mathcal{M}^\lambda(\mathcal{A})$. Для этого мы доказываем сравнения для коэффициентов Фурье тройной модулярной формы $\mathcal{E}(z_1, z_2, z_3; -r, \chi)$, как в работах [PaMMJ], [PaTV].

Функция $\mathcal{L}$ строится как преобразование Меллина $\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_\mu(x)$ меры, которое всегда аналитически зависит от характера x.

Эти меры определены сначала лишь на “пробных функциях” $x = \chi \cdot y_p^r$, но они допускают каноническое продолжение на все локально-аналитические функции. $\square$

Список литературы

[Am-V] AMICE, Y. and VÉLU, J., *Distributions p–adiques associées aux séries de Hecke*, Journées Arithmétiques de Bordeaux (Conf. Univ. Bordeaux, 1974), Astérisque no. 24/25, Soc. Math. France, Paris 1975, 119–131

[BBBCO] BATUT, C., BELABAS, D., BERNARDI, H., COHEN, H., OLIVIER, M.: The PARI/GP number theory system. `http://pari.math.u-bordeaux.fr`

[Boe1] BÖCHERER, S., *Über die Funktionalgleichung automorpher L–Funktionen zur Siegelscher Modulgruppe*, J. reine angew. Math. 362 (1985) 146–168

[Boe2] BÖCHERER, S., *Über die Fourier–Jacobi Entwickelung Siegelscher Eisensteinreihen. I.II.*, Math. Z. 183 (1983) 21–46; 189 (1985) 81–100.

[BHam] BÖCHERER, S., *Ein Rationalitätssatz für formale Heckereihen zur Siegelschen Modulgruppe.* Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 56, 35–47 (1986)

[Boe-Ha] BOECHERER, S., HEIM, B. *L–functions for $GSp_2 \times Gl_2$ of mixed weights.* Math. Z. 235, 11–51(2000)

[BSY] BÖCHERER, S., SATOH, T., and YAMAZAKI, T., *On the pullback of a differential operator and its application to vector valued Eisenstein series,* Comm. Math. Univ. S. Pauli, 41 (1992), 1–22.

[Boe-Schm] BÖCHERER, S., and SCHMIDT, C.–G., *p–adic measures attached to Siegel modular forms*, Ann. Inst. Fourier 50, N°5, 1375–1443 (2000).

[BoeSP] BÖCHERER, S. and SCHULZE-PILLOT, R., *On the central critical value of the triple product L–function.* David, Sinnou (ed.), Number theory. Séminaire de Théorie des Nombres de Paris 1993–94. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 235, 1–46 (1996).

[Bue] BUECKER, K., *Congruences between Siegel modular forms on the level of group cohomology.* Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 46 (1996), no. 4, 877–897.

[Chand70] CHANDRASEKHARAN, K. *Arithmetical functions.* Berlin–Heidelberg–New York, Springer–Verlag (1970).

[Co] COATES, J. *On p–adic L–functions.* Sem. Bourbaki, 40eme annee, 1987–88, n° 701, Asterisque (1989) 177–178.

[Co-PeRi] COATES, J. and PERRIN-RIOU, B., *On p–adic L–functions attached to motives over $\mathbb{Q}$*, Advanced Studies in Pure Math. 17, 23–54 (1989)

[CoPB] COLEMAN, ROBERT F., *p–adic Banach spaces and families of modular forms*, Invent. Math. 127, No.3, 417–479 (1997)

[CoM] COLEMAN, R. and MAZUR, B., *The eigencurve*, Scholl, A. J. (ed.) et al., Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proceedings of the symposium, Durham, UK, July 9–18, 1996. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 254, 1–113 (1998).

[CST98] R. COLEMAN, G., STEVENS, J., TEITELBAUM, *Numerical experiments on families of p–adic modular forms*, in: Computational perspectives in Number Theory, ed. by D.A. Buell, J.T. Teitelbaum, Amer. Math. Soc., 143–158 (1998).

[Colm98] COLMEZ, P. *Fonctions L p–adiques*, Séminaire Bourbaki, exposé n° 851, novembre 1998.

[Colm03] Colmez, P. *La conjecture de Birch et Swinnerton-Dyer p-adique.* Séminaire Bourbaki, exposé n° 919, juin 2003.

[Cour] Courtieu, M., *Familles d'opérateurs sur les formes modulaires de Siegel et fonctions L p-adiques*, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/THESE/ps/ t101.ps.gz`, Thèse de Doctorat, Institut Fourier, 2000, 1–122.

[CourPa] Courtieu, M., Panchishkin, A.A., *Non–Archimedean L–Functions and Arithmetical Siegel Modular Forms*, Lecture Notes in Mathematics 1471, Springer–Verlag, 2004 (2nd augmented ed.)

[De69] Deligne P., *Formes modulaires et reprèsentations l–adiques*, Sem. Bourb. 1968/69 ,exp. no 335. Springer–Verlag, Lect. Notes in Math. N°179 (1971) 139–172

[De79] Deligne P., *Valeurs de fonctions L et périodes d'intégrales*, Proc. Symp. Pure Math AMS 33 (part 2) (1979) 313–342.

[Fei86] Feit, P., *Poles and Residues of Eisenstein Series for Symplectic and Unitary Groups*, Memoir AMS 61 N°346 (1986), 89 p.

[Ga87] Garrett, P.B., *Decomposition of Eisenstein series: Rankin triple products*, Ann. of Math. 125 (1987), 209–235

[GaHa] Garrett, P.B. and Harris, M., *Special values of triple product L–functions*, Amer. J. Math 115 (1993) 159–238

[Go02] Gorsse, B., *Carrés symétriques de formes modulaires et intégration p-adique.* Mémoire de DEA de l'Institut Fourier, juin 2002

[Go-Ro] Gorsse B., Robert G., *Computing the Petersson product $\langle f^0, f_0\rangle$*. Prépublication de l'Institut Fourier, N°654, (2004).

[HaH] Ha Huy, Khoai, *p–adic interpolation and the Mellin-Mazur transform*, Acta Math. Viet. 5, 77–99 (1980).

[Ka-Za] Kaneko, M., Zagier, D., *A generalized Jacobi theta function and quasimodular forms.* The moduli space of curves (Texel Island, 1994), 165–172, Progr. Math., 129, Birkhдuser Boston, Boston, MA, 1995.

[Ha93] Harris, M., and Kudla, S., *The central critical value of a triple product L–functions*, Ann. Math. 133 (1991), 605–672

[Hasse] Hasse, H., *Vorlesungen ъber Zahlentheorie.* Zweite neubearbeitete Auflage. Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Band 59 Springer–Verlag, Berlin–New York 1964 xv+504 pp.

[Hi85] Hida, H., *A p–adic measure attached to the zeta functions associated with two elliptic cusp forms. I*, Invent. Math. 79 (1985) 159–195

[Hi86] Hida, H., *Galois representations into $GL_2(\mathbb{Z}_p[[X]])$ attached to ordinary cusp forms*, Invent. Math. 85 (1986) 545–613

[Hi90] Hida, H., *Le produit de Petersson et de Rankin p–adique*, Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1988–1989, 87–102, Progr. Math., 91, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[Hi93] Hida, H., *Elementary theory of L-functions and Eisenstein series*, London Mathematical Society Student Texts. 26 Cambridge: Cambridge University Press. ix, 386 p. (1993).

[Hi04] HIDA, H., *p–adic automorphic forms on Shimura varieties.* Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2004. xii+390 pp.

[JoH05] JORY–HUGUE, F., *Unicité des h–mesures admissibles p–adiques données par des valeurs de fonctions L sur les caractures*, Prépublication de l'Institut Fourier (Grenoble), N°676, 1–33, 2005

[Iw] IWASAWA, K., *Lectures on p–adic L–functions*, Ann. of Math. Studies, N°74. Princeton University Press, 1972

[Ibu] IBUKIYAMA, T. *On differential operators on automorphic forms and invariant pluriharmonic polynomials*, Comm. Math. Univ. S. Pauli 48 (1999), 103–118

[Ka76] KATZ, N.M., *p–adic interpolation of real analytic Eisenstein series*, Ann. of Math. 104 (1976) 459–571

[Ka78] KATZ, N.M., *p–adic L–functions for CM–fields*, Invent. Math. 48 (1978) 199–297

[KiK] KITAGAWA,KOJI, *On standard p–adic L–functions of families of elliptic cusp forms*, Mazur, Barry (ed.) et al.: p–adic monodromy and the Birch and Swinnerton-Dyer conjecture. A workshop held August 12–16, 1991 in Boston, MA, USA. Providence, R: American Mathematical Society. Contemp. Math. 165, 81–110, 1994

[Ku-Le] KUBOTA T. and LEOPOLDT H.-W., *Eine p–adische Theorie der Zetawerte*, J. reine angew. Math. 214/215 (1964) 328–339

[La] LANG S., *Introduction to Modular Forms*, Springer Verlag, 1976

[Maa] MAASS, H., *Siegel's Modular Forms and Dirichlet Series*, Springer–Verlag, Lect. Notes in Math. N°216 (1971).

[Man73] MANIN, YU.I., *Periods of cusp forms and p-adic Hecke series*, Mat. Sbornik 92 (1973) 378–401(in Russian); Math. USSR, Sb. 21 (1973), 371–393 (1975) (English translation).

[Man74] MANIN, YU.I., *The values of p–adic Hecke series at integer points of the critical strip.* Mat. Sbornik 93 (1974) 621–626 (in Russian)

[Man76] MANIN, YU.I., *Non–Archimedean integration and p–adic L–functions of Jacquet – Langlands*, Uspekhi Mat. Nauk 31 (1976) 5–54 (in Russian); Russ. Math. Surv. 31, No.1, 5–57 (1976) (English translation).

[Ma-Pa77] MANIN, YU.I. and PANCHISHKIN, A.A., *Convolutions of Hecke series and their values at integral points*, Mat. Sbornik, 104 (1977) 617–651 (in Russian); Math. USSR, Sb. 33, 539–571 (1977) (English translation).

[Ma-Pa05] MANIN, YU.I. and PANCHISHKIN, A.A., *Introduction to Modern Number Theory*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 49 (2nd ed.), Springer–Verlag, 2005, 514 p.

[MTT] MAZUR, B., TATE, J. and TEITELBAUM, J., *On p–adic analogues of the conjectures of Birch and Swinnerton–Dyer*, Invent. Math. 84, 1–48 (1986).

[Miy] MIYAKE, TOSHITSUNE, *Modular forms.* Transl. from the Japanese by Yoshitaka Maeda. Berlin etc.: Springer–Verlag. viii, 335 p. (1989).

[Or] ORLOFF T., *Special values and mixed weight triple products (with an Appendix by D.Blasius)*, Invent. Math. 90 (1987) 169–180

[Nag1] NAGAOKA, S., *A remark on Serre's example of p-adic Eisenstein series*, Math. Z. 235 (2000) 227–250.

[Nag2] NAGAOKA, S., *Note on* $\bmod p$ *Siegel modular forms*, Math. Z. 235 (2000) 405–420.

[Pa94] PANCHISHKIN, A.A., *Admissible Non-Archimedean standard zeta functions of Siegel modular forms*, Proceedings of the Joint AMS Summer Conference on Motives, Seattle, July 20 – August 2 1991, Seattle, Providence, R.I., 1994, vol.2, 251–292

[PaViet] PANCHISHKIN, A.A. *Non-Archimedean Mellin transform and* p*-adic* L*-Functions*, Vietnam Journal of Mathematics, 1997, N3, 179–202.

[PaSE] PANCHISHKIN, A.A., *On the Siegel–Eisenstein measure. Israel Journal of Mathematics*, Vol. 120, Part B(2000), 467–509

[PaIAS] PANCHISHKIN, A.A., *On* p*-adic integration in spaces of modular forms and its applications*, J. Math. Sci., New York 115, No.3, 2357–2377 (2003).

[PaMMJ] PANCHISHKIN, A.A., *A new method of constructing* p*-adic* L*-functions associated with modular forms*, Moscow Mathematical Journal, 2 (2002), Number 2, 1–16

[PaTV] PANCHISHKIN, A.A., *Two variable* p*-adic* L *functions attached to eigenfamilies of positive slope*, Invent. Math. v. 154, N3 (2003), pp. 551–615

[PaB1] PANCHISHKIN, A.A., *The Maass–Shimura differential operators and congruences between arithmetical Siegel modular forms*, Preprint MPI 2002 – 41, 1–52 (принята в ММЖ в октябре2005)

[PaB1] PANCHISHKIN, A.A., *Admissible measures for standard* L*-functions and nearly holomorphic Siegel modular forms*, Preprint MPI 2002 – 42, 1–65

[PaJTNB] PANCHISHKIN, A.A., *Sur une condition suffisante pour l'existence des mesures* p*-adiques admissibles*, Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux, v. 15 (2003), pp. 1–24

[PSRa] PIATETSKI–SHAPIRO, I.I., and RALLIS, S., *Rankin triple* L*–functions*, Compositio Math. 64 (1987) 333–399

[Puy] PUYDT, J., *Valeurs spéciales de fonctions L de formes modulaires adŭliques*, Thése de Doctorat, Institut Fourier (Grenoble), 19 décembre 2003

[Ran39] RANKIN, R.A., *Contribution to the theory of Ramanujan's function* $\tau(n)$ *and similar arithmetical functions. I.II*, Proc. Camb. Phil. Soc 35 (1939) 351–372

[Ran52] RANKIN, R.A., *The scalar product of modular forms*, Proc. London math. Soc. 2 (3) (1952) 198–217

[Ran90] RANKIN, R.A., *The adjoint Hecke operator.* Automorphic functions and their applications, Int. Conf., Khabarovsk/USSR 1988, 163–166 (1990)

[Sa] SATOH,T., *Some remarks on triple L-functions*, Math. Ann. 276, 687–698 (1987)

[Schm] SCHMIDT, C.–G., *The* p*-adic* L*-functions attached to Rankin convolutions of modular forms*, J. reine angew. Math. 368 (1986) 201–220

[Scho] SCHOLL, A., *Motives for modular forms*, Inv. Math. 100 (1990), 419–430

[SchEu] SCHOLL, A.J., *An introduction to Kato's Euler systems*, Scholl, A. J. (ed.) et al., Galois representations in arithmetic algebraic geometry. Proceedings of the symposium, Durham, UK, July 9–18, 1996. Cambridge: Cambridge University Press. Lond. Math. Soc. Lect. Note Ser. 254, 379–460 (1998).

[Se73] Serre, J.–P., *Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques*, Lect Notes in Math. 350 (1973) 191–268 (Springer Verlag)

[SePB] Serre, J.–P., *Endomorphisms complètement continus des espaces de Banach p-adiques*, Publ. Math. Inst. Hautes Etud. Sci., 12, 69–85 (1962).

[Shi71] Shimura G., *Introduction to the Arithmetic Theory of Automorphic Functions*, Princeton Univ. Press, 1971

[Shi75] Shimura G., *On the holomorphy of certain Dirichlet series*, Proc. Lond. Math. Soc. 31 (1975) 79–98

[Shi76] Shimura G., *The special values of the zeta functions associated with cusp forms.* Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), no. 6, 783–804.

[Shi77] Shimura G., *On the periods of modular forms*, Math. Annalen 229 (1977) 211–221

[Shi82] Shimura, G., *Confluent Hypergeometric Functions on Tube Domains*, Math. Ann. 260 (1982), p. 269–302.

[Sh83] Shimura, G., *On Eisentsein Series*, Duke Math. J; 50 (1983), p. 417–476.

[ShiAr] Shimura, G., *Arithmeticity in the theory of automorphic forms*, Mathematical Surveys and Monographs. 82. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS). x, 302 p. (2000)

[Til-U] Tilouine, J. and Urban, E., *Several variable p-adic families of Siegel-Hilbert cusp eigenforms and their Galois representations*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4e série, 32 (1999) 499–574.

[V] Visik, M.M., *Non-Archimedean measures connected with Dirichlet series*, Math. USSR Sb. 28 (1976), 216–228 (1978).

[MV] Vishik, M.M. and Manin, Yu.I., *p-adic Hecke series of imaginary quadratic fields*, Math. USSR, Sbornik 24 (1974), 345–371 (1976).

[We56] Weil, A., *On a certain type of characters of the idèle-class group of an algebraic number-field*, Proceedings of the international symposium on algebraic number theory, Tokyo & Nikko, 1955, pp. 1–7, Science Council of Japan, Tokyo, 1956.

[Wi95] Wiles A., *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Ann. Math., II. Ser. 141, No.3 (1995) 443–55.